横磁場の下でのXYスピン系におけるソリトン的励起とダイナミクスおよび関連する問題（superfluid He^4 など）

京都工芸繊維大学工芸学部物理教室
武野正三

§1. はじめに

古典的スピン系は非線型励起としてのソリトンが重要且つ本質的な役割を果すfieldの一つである。一次元の場合，等方ハイゼンベルグ模型は所謂非線型シュレディンガー方程式と同等であることが示され，また微分幾何学のある種の問題とも重要なかかわり合いを持っている。[1] 一次元の場合，主として数理的色彩が濃いのはその性格上当然であるが，二次元，三次元の問題では古典的スピン系は他のfieldの問題と関連していることが最近明らかにされつつある。例えば，二次元の古典等方ハイゼンベルグ模型には定常解として，インスタントン解があり，これがクォークの閉じ込めと関連していることが論じられている。[2] また，三次元の等方ハイゼンベルグ模型は軸対称重力場と関連していることが知られている。[3] ここでは，液体He^4と関連の深い横磁場の下でのXYスピン系における[4]ソリトン的非線型励起とそのダイナミクスおよび関連する問題を論ずることにする。この古典的スピン系における非線型励起を表わす一様流解および渦解がソリトンとしての性質を持つことを示し，これらおよびそれに関連する物理的諸問題を考察することにする。

我々の考察の対象となる系は次のハミルトニアンで表わされる：

$$H = -\epsilon \sum_n S_n^z - \sum_{nm} J(n,m)(S_n^x S_m^x + S_n^y S_m^y), \qquad |\vec{S}_n| = 1. \tag{1}$$

ここに，ϵは定数，$J(n,m)$は相互作用を表わす定数である。S_n^α $(\alpha = x, y, z)$は二つの回転角θ_n, φ_nにより次のごとくparametrizeされる。

$$S_n^x = \cos\theta_n \sin\varphi_n, \qquad S_n^y = \sin\theta_n \sin\varphi_n, \qquad S_n^z = \cos\theta_n. \tag{2}$$

すると，スピンに対する運動方程式は一般に次の形に書ける，

$$\dot{\theta}_n = (1/\sin\theta_n)(\partial H/\partial\varphi_n), \qquad \dot{\varphi}_n = -(1/\sin\theta_n)\,\partial H/\partial\theta_n. \tag{3}$$

ボース系とのよりよき対応を考察するためには，(3)の代りに

$$\dot{\theta}_n = (1/\sin\theta_n\cos\theta_n)(\partial H/\partial\varphi_n), \qquad \dot{\varphi}_n = -(1/\sin\theta_n\cos\theta_n)\,\partial H/\partial\theta_n \tag{4}$$

を導入する方が便利である。(4)式で連続体近似をとることにより得られるスピン系を便宜上spin fluidと呼ぶことにする。横磁場下のXY模型に対して，spin fluidは次の式で表わされる

$$(1/2)(\partial/\partial t)(\sin^2\theta) + \nabla\cdot(\sin^2\theta\,\nabla\varphi) = 0 \tag{5a}$$

$$\sin\theta\cos\theta\,\dot{\varphi} = -\gamma\sin\theta + \cos\theta\left[1-(\nabla\varphi)^2+\Delta\right]\sin\theta, \quad \gamma = \epsilon/2\sum_m J(n,m) \tag{5b}$$

ここで，時間変数，空間変数は適当に rescale してある。すると (5a) は spin fluid の速度 $\vec{v}$, 密度 ρ を次式

$$\vec{v} = \nabla\varphi, \qquad \rho = \sin^2\theta \tag{6}$$

で定義すると，連続の方程式となっていることが分かる。但し，元のスピン系の場合には，(5a) の左辺第一項の $\sin^2\theta$ の代りに $\cos\theta$ と云う項が現われ，流体の方程式に対応したものとはならないことに注意する必要がある。(5) 式の定常解は系の local mimum state を与えるが，それは

$$2\cos\theta\,\nabla\theta\cdot\nabla\varphi + \sin\theta\,\Delta\varphi = 0 \tag{7a}$$

$$-\gamma\sin\theta + \cos\theta\left[1-(\nabla\varphi)^2+\Delta\right]\sin\theta = 0 \quad \text{or} \quad \Delta\sigma + \left[1-(\nabla\varphi)^2\right]\sigma - \frac{\gamma\sigma}{\sqrt{1-\sigma^2}} = 0 \tag{7b}$$

$$\sigma \equiv \sin\theta$$

の解である。ここでは，先ず，(7) 式の解としての一様流解と渦解を論じ，前者を液体 He⁴ の flowing state と対応させ，両者のエネルギー密度を比較することにより，critical velocity を導出する。そして，液体 He⁴ の場合と比較することにする。つぎに，渦解に対しては，(5) 式より，渦のダイナミクスを論じ，それが二次元の流体力学に現われる渦のダイナミクスと同じ形の方程式に従うことを示す。

§2. 定常解の一般的性質

(7a) 式で φ は Laplace 方程式の解であるとする。即ち

$$\Delta\varphi = 0 \qquad \text{それ故} \qquad \nabla\theta\cdot\nabla\varphi = 0 \quad \text{or} \quad \nabla\theta\cdot\vec{v} = 0 \tag{8}$$

(8) は velocity field or velocity potential を決める式であり，(7b) はそれに応じてスピン流体の密度を決める式と考えることができる。定常解の形は，すると，(8) より与えられ，物理的に興味あるものとして，次の二つの型の解を考える：

(i) 一様流解

$$\vec{v} = \text{const} = \vec{v}_0 = v_0\hat{z} \quad \text{or} \quad \varphi = v_0 z\ ; \quad v_0\text{：定数}\ ; \quad \hat{z}\text{：z-軸方向の単位ベクトル} \tag{9a}$$

$$\theta = \theta(x, y). \tag{9b}$$

(ii) 渦解 or 円柱対称解

$$\varphi = \gamma\phi \quad \text{or} \quad \vec{v} = (\gamma/r)\hat{\phi}\ ; \quad \gamma = \pm1, \pm2, \dots, \tag{10a}$$

$(r = (x^2+y^2)^{1/2},\ \phi,\ z)$ ：円柱座標； $\hat{\phi}$：ϕ 方向の unit vector

$$\theta = \theta(r). \tag{10b}$$

(10a) のもっと一般的な解は

$$\varphi = \sum_j \gamma_j \frac{y-y_j}{x-x_j}, \quad \gamma_j = \pm1, \pm2, \dots\ ; \quad x_j, y_j\text{：定数, vortex の位置を表わす} \tag{10a'}$$

以下 §3, §4 に於て上式で与えられる一様流解，渦解をより精しく論ずることにする。

§3. 一様流解とその性質

(9)を(7b)に代入すると，流体の密度を与える式として

$$\frac{\partial^2\sigma}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\sigma}{\partial y^2}+(1-v_0^2)\sigma-\gamma\sigma(1-\sigma^2)^{-1/2}=0 \qquad (11)$$

が得られる。この式の non-trivial solution として，symmetry-breaking state を与える解

$$\sigma=\pm\sqrt{1-\frac{\gamma^2}{(1-v_0^2)^2}}\equiv\pm\sigma_0 \qquad \text{with} \quad \gamma<1 \qquad (12)$$

が得られる。これはz軸方向に速さv_0の flowing state があるときの凝縮相に対応するものである。σ_0の極大値 $\sigma_0(max)$ および σ_0がゼロになる速度 $v_0(max)$ は，それぞれ，次の式で与えられる。

$$\sigma_0(max)=\sqrt{1-\gamma^2}, \qquad v_0(max)=(1-\gamma)^{1/2} \qquad (13)$$

つぎに，系の Hamiltonian density を $\mathcal{H}$ とするとそれは次の如くなる。

$$H=\int \mathcal{H}\, d\vec{r} \quad \text{with} \quad \mathcal{H}=-\gamma\sqrt{1-\sigma^2}-\frac{\sigma^2}{2}+\frac{1}{2}\left[(\nabla\sigma)^2+\sigma^2(\nabla\varphi)^2\right] \qquad (14)$$

$\mathcal{H}\equiv\mathcal{H}(\sigma)$ に於て，$\mathcal{H}(\sigma=\sigma_0)\equiv E_{uf}(v_0)$ を速さv_0の flowing state のエネルギー密度と定義するとそれは

$$E_{uf}(v_0)=-\frac{1-v_0^2}{2}\left[1+\frac{\gamma^2}{(1-v_0^2)^2}\right] \qquad (15)$$

で与えられる。この状態の ground state からの excitation energy ΔE_{uf} は

$$\Delta E_{uf}\equiv E_{uf}(v_0)-E_{uf}(0)=\frac{v_0^2}{2}\left(1-\frac{\gamma^2}{1-v_0^2}\right) \qquad (16)$$

となる。(11)は static な2次元の φ^4-like model 方程式であるが，これは横磁場のIsingスピン系に現われる非線型方程式と同一のものであることに注意したい[5)]。液体He^{4}の問題に関しては，いま，壁がyz-面内にあり flowing state はy-方向に一様にあるとしてσをxのみの関数と考えると，(11)は境界条件

$$\sigma=0 \quad \text{as} \quad x\to 0 \quad \text{and} \quad \sigma=\sigma_0 \quad \text{as} \quad x\to\infty \qquad (17)$$

の下で

$$\frac{\sigma}{1+n}=\frac{\sigma_0}{1+n_0}\tanh\left[\left(\frac{\sigma_0}{2n_0}\right)\left\{(1-v_0^2)^{1/2}x-\sin^{-1}\sigma\right\}\right] \quad ; \quad n\equiv\cos\theta,\ n_0\equiv\cos\theta_0 \qquad (18)$$

の解により記述される。この解はφ^4-model の kink 解に相当するものであるが，これは当然，(12)により与えられる symmetry-breaking state の二重縮退性によるものである。尚，(18)より，液体He^{4}の healing length に相当するものを議論することができる訳であるが，詳細については省略することにする。尚，(7)式又は(11)より明らかなことであるが，Ginzburg-Pitaevskii方程式の場合等と異なり[6)]，スピン系特有のroot型の非線型項が現われる。

§4 渦解とその性質

(10)を(7b)に代入するとσに対する次のような非線型方程式の一つ

$$\frac{d^2\sigma}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\sigma}{dr}+\left(1-\frac{\delta^2}{r^2}\right)\sigma-\frac{\gamma\sigma}{\sqrt{1-\sigma^2}}=0 \qquad (19)$$

方程式が得られる。この式を境界条件

$$\sigma=0 \quad \text{as } r\longrightarrow 0 \qquad \text{and} \quad \sigma=\sigma_0(max)=(1-\gamma^2)^{1/2} \qquad (20)$$

で取扱ふものとする。(19)の厳密解は求めることが出来ないが、次の形の漸近解を持つことが分かる：

$$\sigma=\begin{cases} J_\delta[r(1-\gamma)], \quad (J_\delta : \text{Bessel func.}) & \text{for small } r \qquad (21a) \\ \sigma_0(max)-\delta^2\gamma^2\sqrt{1-\gamma^2}/r^2 & \text{for large } r. \qquad (21b) \end{cases}$$

いま、spin fluid は半径R、長さLの円筒状の容器に収っているものとすると、そのエネルギーE_vは、vortex の外部$E_v^{(out)}$と内部$E_v^{(in)}$の二つの部分に分けられる。vortex core の外部に於ては σ は r につきゆるやかに変化するものとして(19)に於て$d^2\sigma/dr$, $d\sigma/dr$を含む部分を無視すると$E_v^{(out)}$に対する近似式として

$$E_v=-\pi\gamma L\left[\frac{1}{2}(R^2-r_1^2)\left(\gamma+\frac{1}{\gamma}\right)+\frac{\gamma}{2}\ln\frac{R^2-1}{r_1^2-1}-\frac{1}{\gamma}\ln\frac{R}{r_1}\right], \quad (r_1 : \text{core の半径}) \qquad (22)$$

$\delta=\pm 1$

が得られる。$\delta=\pm 1$に対する1個のvortexの生成エネルギーΔE_vは

$$\Delta E_v=E_v-\pi L R^2 E_{uf}(v_0=0)=E_v^{(in)}+2\pi L\left[\frac{1}{4}(1+\gamma^2)r_1^2+\frac{1}{2}(1-\gamma^2)\ln\frac{R}{r_1}\right] \qquad (23)$$

となる。(22)における特徴的な項は$\ln(R/r_1)$の項であり、液体He^4の場合と当様同じ事情になる。

§5. Critical velocity

§3、§4に於て、一様流解、渦解につき論じたが、v_0が小さいときには次の不等式

$$\text{一様流状態のエネルギー} < \text{渦状態のエネルギー} \qquad (24)$$

が成り立つ。一様流状態のエネルギーはv_0の増加と共に増大するから、v_0のある値に対して両者は逆に等しくなる。このようなv_0の値v_{0c}をここではcritical velocityと定義すれば、それは

$$\pi R^2 L\,\Delta E_{uf}(v_0)=\Delta E_v \qquad (25)$$

より得られる。ΔE_vの中で、r_1はatomic scaleの程度と考えると、$E_v^{(in)}$からの寄与は無視できて、v_{0c}に対する近似式として

$$v_{0c} = \sqrt{2\ln(R/r_1)}\,/\,R \qquad (26)$$

が得られる。一方，よく知られている流体 He^4 に対する Feynman の式は，[7] critical velocity を v_{cr} として

$$v_{cr} = (h/mR)\,\ln(R/r_1) \qquad (27)$$

となる。尚，(26) の導出に際しては，§1～5 を通じて適当に rescale された座標を用いているので，それはまだ速度のディメンジョンを持っていない。従って，(26) と (27) は R-dependence を別とすれば，間直接比較されないものである。

§6. 一様流状態のまわりの小さなゆらぎ（Bogoliubov phonons）

この section は本質的に線型の問題に属するものであるが，(3) に対する (4) の意味を考察する場合に有用と思われる。$\sigma = \sin\theta$，$n = \cos\theta$ に対する (5) 式は

$$\sigma\dot{\sigma} + \nabla\cdot(\sigma^2\nabla\varphi) = 0 \qquad (28a)$$

$$n\sigma\dot{\varphi} = -\gamma\sigma + n\left[1-(\nabla\varphi)^2+\Delta\right]\sigma \qquad (28b)$$

となる。いま，定常解 $\sigma = \sigma(0)$，$n = n(0)$，$\varphi = \varphi(0)$ のまわりのゆらぎを考察するため

$$\sigma = \sigma(0)+\sigma', \quad n = n(0)+n', \quad \varphi = \varphi(0)+\varphi' \qquad (29)$$

$$\text{with} \quad \sigma^2 + n^2 = 1, \quad \sigma(0)^2 + n(0)^2 = 1$$

とおき，それを (28) に代入して，σ'，n'，φ' につき 1 次の項のみを残す。すると，それ等に対する式として

$$\dot{\sigma}' = -2\vec{v}_0\cdot\nabla\sigma' - \sigma_0\Delta\varphi' \qquad (30a)$$

$$\dot{\varphi}' = -2\vec{v}_0\cdot\nabla\varphi' - \frac{\sigma_0}{1-\sigma_0^2}(1-v_0^2)\sigma' + \frac{1}{\sigma_0}\Delta\sigma' \qquad (30b)$$

が得られる。そこで

$$\sigma' = A\exp[i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})], \qquad \varphi' = B\exp[i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})] \qquad (31)$$

とおくと分散関係を表わす式

$$\omega \equiv \omega(\vec{k}) = \sigma_0\sqrt{\frac{1}{1-\sigma_0^2} + \frac{k^2}{\sigma_0^2}}\;k \xrightarrow{k\to 0} \sqrt{\frac{\sigma_0^2}{1-\sigma_0^2}}\;k \qquad (32)$$

が得られる。これは Bogoliubov phonon に対応する線型モードの分散式である。一方 (3) からは

$$\omega(\vec{k}) = \sqrt{\sigma_0^2 + n_0^2k^2}\;k \xrightarrow{k\to 0} \sigma_0 k \qquad (32')$$

が得られることを附記したい。

§7. 液体 He^4 との対応

松原－松田の仕事以来[4]，此処で考察しているスピン模型は液体 He^4 と密接な対応を持っていることが分かっている。これまで得られた結果が，He^4 の場合に対してどのような意味を持っているかを調べるために，この section では普通の scale を用いることにする。液体 He^4 の場合の condensate wave function ψ は今の場合

$$\psi = \sin\theta \, e^{i\varphi} \tag{33}$$

ととることに対応する。すると，(7) は次の形を持つ：

$$-J\alpha a^2 \Delta\psi - J\psi + \epsilon\psi(1-|\psi|^2)^{-1/2} = 0 \tag{34}$$

ここに

$$J = \sum_m 2J(n,m), \qquad a:\ \text{格子定数}$$

である。また，α は $J(n,m)$ のフーリエ変換に於て，k に依存するもののうちで最低次のものである。即ち

$$J(\vec{k}) = \sum_m J(n,m)\exp[i\vec{k}\cdot(\vec{m}-\vec{n})a] \longrightarrow J(\vec{k}=0) - J(\vec{k}=0)(\alpha_1 k_1^2 + \alpha_2 k_2^2 + \alpha_3 k_3^2)\,a^2$$
$$\longrightarrow J(\vec{k}=0) - J(\vec{k}=0)\,\alpha^2 k^2 a^2 \tag{35}$$

としたものである。一方，Gross－Pitaevskii 方程式は[6]

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi - \beta\psi + g|\psi|^2\psi = 0 \qquad \beta,\ g:\ \text{定数} \tag{36}$$

により表わされる。ここで次の対応

$$\alpha a^2 J \longleftrightarrow \hbar^2/2m, \qquad J-\epsilon \longleftrightarrow \beta, \qquad \epsilon/2 \longleftrightarrow g \tag{37}$$

があることが分かる。従って，(26) で与えられる critical velocity，(32) より得られる音速 c は，それぞれ

$$v_{0c} = (\hbar/mR)\sqrt{2\ln(R/r_1)}, \qquad c = (\hbar/ma\alpha^{1/2})\sqrt{\frac{\sigma_0^2}{1-\sigma_0^2}} \tag{38}$$
$$\sigma_0 = \sqrt{1-(\epsilon^2/J^2)}$$

となる。ここで，

$$m = 2.7\times10^{-24}\,g, \quad a = 3\times10^{-8}\,cm, \quad \alpha = 1/6, \quad R = 10^{-5}\,cm, \quad r_1 = 4\times10^{-8}\,cm, \quad \epsilon/J = 1/4 \tag{39}$$

とすると，

$$v_{0c} = 50\,cm/sec, \qquad v_{cr} = 100\,cm/sec, \qquad c = 230\,m/sec, \quad c_{exp} = 240\,m/sec \tag{40}$$

と云う結果となる。ただし、(39)に於て、R と Γ の数値は Feynman のものと同一のものを用いた。また、C_{exp} は音速の実験値である。尚(32')より得られる音速を C' とすると、(39)で与えられる数値に対して

$$c' = (\hbar/m a \alpha^{1/2})\,\sigma_0 = 60\,\mathrm{m/sec} \tag{41}$$

が得られる。これは、松原−松田により得られた音速に対応する。[4] その数値は(40)の第3式に於て与えられるものより約1/4程小さく、実験と大きく異なっている。これが、dynamic regime に於ては、流体との対応を論ずる限り、(3)より(4)がよいと思われる第一の理由である。(40)で与えられる結果は、v_{0c} の数値、表式に尚若干の改良すべき点があるが、大体に於て良好のように思われる。

§8. 渦のダイナミクス(二次元の場合)

2次元の場合、渦解が物理的にみて唯一の興味ある解となる。この場合の渦のダイナミクスを支配する方程式は何か。これがこの section の主要なる目標である。いま、(5)に於て φ は次の式をみたすものとする:

$$\varphi = \Omega t + \phi \quad \text{with} \quad \Delta\phi = 0\ ; \qquad \phi = \sum_j \delta_j \tan^{-1}\frac{y-y_j}{x-x_j} \equiv \sum_j \phi_j(\vec r, \vec r_j) \tag{42}$$

即ち ϕ は、定常問題の場合の φ の解(10a')と同一の形をとるものとする。ここでの基本的仮定は、<u>ϕ, θ は渦の座標 $\vec r_1, \vec r_2, \ldots$ を通じてのみ時間 t に依存すると云うものである。</u>

すると、(5a),(5b)はそれぞれ

$$\sum_j \nabla_j\theta\cdot\dot{\vec r}_j = -2\sum_j \nabla\theta\cdot\vec v_j(\vec r, \vec r_j) \tag{43a}$$

$$\sin\theta\cos\theta\sum_j \nabla_j\phi_j\cdot\dot{\vec r}_j = -\gamma\sin\theta + \cos\theta(1+\Delta)\sin\theta - \sin\theta\cos\theta\sum_{j,k}\vec v_j(\vec r,\vec r_j)\cdot\vec v_k(\vec r,\vec r_k) - \Omega\sin\theta \tag{43b}$$

となる。ただし、$\vec v_j(\vec r,\vec r_j) = (v_{jx}(\vec r,\vec r_j), v_{jy}(\vec r,\vec r_j))$ は velocity field $\vec v = (v_x, v_y)$ への j 番目の vortex からの寄与である。

$$v_{jx} = -\delta_j\frac{y-y_j}{(x-x_j)^2+(y-y_j)^2}, \qquad v_{jy} = \delta_j\frac{x-x_j}{(x-x_j)^2+(y-y_j)^2} \tag{44}$$

で与えられる。$\vec r\to\vec r_i$ の limit では

$$\theta(\vec r, \vec r_1, \vec r_2, \ldots) = \theta(\vec r-\vec r_i) \propto |\vec r-\vec r_i|^{n_i} \quad (n_i>0)\,, \qquad \nabla\theta\cdot\vec v_i(\vec r,\vec r_i) \ \text{for}\ \vec r\to\vec r_i \tag{45}$$

となるから

$$\dot{\vec r}_i = 2\sum_{j(\neq i)}\vec v_j(\vec r_i,\vec r_j) \tag{46}$$

が得られる。これが渦の運動をきめる式である。尚、(46)を(43b)に代入して得られるものは極限 $\vec r\to\vec r_i$ に於て(45)の性質を持つことが示される。(46)を得るには、vortex core

の極く近傍での解の性質(45)が必要であるが、このことは、ここでの論旨がむじゅんのないものであることを示すものである。(46)は次の正準方程式：

$$\gamma_i \dot{x}_i = \partial H/\partial y_i, \qquad \dot{y}_i = -\partial H/\partial x_i \tag{47}$$

$$H = -\sum_{i\neq j} \gamma_i \gamma_j \ln|\vec{r}_i - \vec{r}_j| \tag{48}$$

と同等である。従って、2次元のspin fluidに於ける渦のダイナミクスは、通常の2次元流体力学の場合の渦のダイナミクス[8]と同一の式に従うことが示される。尚、この結果は、元のスピン系のモデルの詳細にはよらず、唯対称性と次元数によりきまるものであるようであり、一種のuniversalityが成り立つことを暗示している。(47), (48)は多体問題或は力学系の一つの例を提供するが、近年、NovikovとSedovは、この力学系は渦が3個迄は可積分であるが、4個以上になると非可積分となること、そして、数値計算により4個の場合の渦はstochasticな振舞をすることを示している。[9] 従って、我々の場合のspin fluidにおける渦のダイナミクスに於ても或る種のstochasticな振舞が現われることを暗示している。多数の渦から成る系のダイナミクスは、或る状況の下では、乱流的様相を示すかも知れない。

Acknowledgements

本研究[9]は、名大工学部（現在Los Alamos Scientific Laboratory滞在中）本間重雄氏との共同研究によるものである。同氏との討論により啓発されることが多かったことを附記したい。また、科研費の班に加えさせて頂き、非常に有意義であった。東大理学部和田靖氏をはじめ、討論して頂いた班員の方々に感謝の意を表したい。

References

1) M. Lakshmanan, Phys. Letters 61A (1977), 53 and references cited therein.
2) A. A. Belavin and A. M. Polyakov, JETP Letters 22 (1975), 245.
岩崎洋一, 物性研究
3) S. Takeno, Prog. Theor. Phys. 66 (1981), 1250 and references cited therein.
4) T. Matsubara and H. Matsuda, Prog. Theor. Phys. 16 (1956), 569.
5) S. Takeno, J. Phys. Soc. Japan, 48 (1980), 1075.
6) V. L. Ginzburg and L. P. Pitaevskii, Soviet Phys.-JETP 34 (1958), 1240.
E. P. Gross, Nuovo Cimento 20 (1961), 454; J. Math. Phys. 4 (1963), 195.
7) R. P. Feynman, Statistical Physics (W. A. Benjamin, Inc., 1972), Chap. 11.
8) E. A. Novikov and Y. B. Sedov, Soviet Phys.-JETP 48 (1978), 440 and references cited therein.
9) S. Homma, T. Aoki and S. Takeno, Prog. Theor. Phys. 66 (1981), 1590.